Gondolatok a matematika tanításáról, 2015

Kiss László

Óbudai Egyetem, Rejtő Sándor Könnyűipari és Környezetmérnöki Kar,

Médiatechnológai és Könnyűipari Intézet

**Összefoglalás:**

Minden tárgy tanításának, így a matematikáénak is az életről kell szólnia, gondolkodó embereket kell nevelnie. Ezt szem előtt tartva teszek fel és válaszolok meg néhány kérdést. Mint például:

­ Természetes szám-e a nulla?

­ Mi a függvény?

­ Mi a logaritmus?

­Egyáltalában mitől jó egy definíció?

­ Mi az egyváltozós, egyértékű függvény deriváltjának geometriai jelentése?

­ Mikor van egy egyváltozós, egyértékű függvénynek szélsőértéke?

­ Mikor használunk L'Hôpital-szabályt, és mikor nem?

­ Mire jó a racionális törtfüggvény integrálása?

Előadásomban megpróbálom felvázolni, hogyan képzelem el a matematika tanítását ma, 2015-ben, a 21. században.

**Kulcsszavak:** oktatásmódszertan, matematika

**Mottók**

„… annyiba kerül, amennyibe kerül, de megéri, próbáljuk meg érdekessé tenni az iskolát.”

Karácsony Sándor [1]

„Másrészt: a tudományban nem a *megoldás* az érdekes (hiszen az sosem végleges, mindig újabb problémákat vet fel), hanem a problémáknak és a megoldásuk felé vezető útnak a felismerése. Kérdezni kell megtanítanunk tanítványainkat.”

Karácsony Sándor [1]

„Így minden jó fa jó gyümölcsöt terem, a rossz fa pedig rossz gyümölcsöt. Nem hozhat a jó fa rossz gyümölcsöt, sem a rossz fa jó gyümölcsöt”

Mt. 7,17-18

Minden mindennel összefügg, minden algoritmus, és minden függvény.

**Bevezetés**

Egy szellemében erős, gondolkodó nemzet megteremtésében szeretnék részt vállalni.

Fontosnak tartom, hogy bármit is tanítunk az iskolákban, az a diákok számára valami módon életszerű legyen, és kapcsolni tudják az általuk már megtapasztalt dolgokhoz.

Karácsony Sándor (véleményem szerint) az elmúlt század legnagyobb magyar pedagógusa. A következő idézet „Leckék a leckékről” c. könyvének [2] hetedik fejezetéből származik: „De soha egyetlen egy pillanatra sem ötlött eszembe, hogy az otthoni szilva ugyanaz a szilva, mint amiről az iskolában tanulunk.”

Mivel életem minden szegmensében valami jelmondat vezet, így felsoroltam a mottókban azokat a szempontokat, amelyek mentén cikkem témájában elmélkedem.

Hiszem, hogy a gondolkodó ember felépítéséhez szükség van a matematikára.

A matematika nem önálló tudomány. Sem úgy, hogy fejlődéséhez nincs szüksége más tudományokra, sem úgy, hogy nem hatna más tudományok fejlődésére.

A matematikus-gondolkodás képességéhez, illetve annak jól fejleszthetőségéhez az általános intelligencia fejlesztése szükséges, amihez aztán kölcsönhatásként a matematikus gondolkodóképesség hozzájárul.

Az általános intelligencia fejlesztése alapvetően a nyelvi nevelésben nyilvánul meg, melynek kulcsa a magyar népmese és népdal, továbbá a klasszikus költők ritmikus gyermekversei. Már a gyermek kicsi korában lehetséges és szükséges a logikai képességek fejlesztése, ami később is állandóan feladat marad. Mivel a kisgyermek életeleme a játék, ezért minden olyan dologtól, ami őt a természetes világ megismerésétől elvonja (pl. TV, számítógép, gépi játékok), meg kell óvni.

A matematikát tehát játékosan, sőt egyenesen játszva kell tanítani, állandóan kérdéseket feltéve. A kérdések közül két alapvetően fontosat mindenképpen kiemelnék. Mit tudok? Mi történik? Az elsőre mindig az a válasz, hogy az adott problémával kapcsolatban milyen ismeretekkel rendelkezem. Azokat minden esetben felsorolva és végiggondolva. A másikra pedig az, hogy milyen folyamat részeként kell az adott problémát vizsgálnom. (Ennek a kérdésnek a feltevése még fontosabb olyan tárgyaknál, ahol rendszeresen folyamatokat vizsgálunk, mint például a fizika vagy a kémia.)

Meg kell tanítanunk a problémákat minél több oldalról megközelíteni, felhasználva az addig szerzett ismereteket. Fontos, hogy minden olyan esetben, amikor általánosítani lehet, azt meg is tegyük. Fontos az is, hogy el tudjunk vonatkoztatni az adott probléma által sugallt gondolatoktól. És ami talán mindennél fontosabb: fel kell ismernünk, hogy a matematika feladatok önmagukért való megoldása, netán egy megoldás betanulása szinte teljesen értelmetlen dolog.

Bár a matematika szépsége önmagában is örömet szerezhet, alapvetően mégis más tudományokat és az emberi gondolkozás fejlesztését kell(ene) szolgálnia.

A továbbiakban az összefoglalóban feltett kérdésekre összpontosítok.

**Természetes szám-e a nulla?**

Hogy a 0 természetes szám vagy nem, a vita teljesen felesleges. Nyilván van érv mellette és ellene is. Lényeges lenne azonban a kérdés egységes kezelése. Bár az én véleményem e tekintetben az, hogy legyen a 0 természetes szám annak, akinek természetes, hogy nincsen semmije.

**Mi a függvény?**

Amikor a függvény definíciójáról beszélek, valójában nem csupán arról szólnék, hanem annak példáján keresztül szeretném bemutatni egy tetszőleges fogalom definiálásának problémáját, egy lehetséges módszerét.

Nem tartom szerencsésnek azt a definíciót, ami további, az olvasója számára lényegében ismeretlen, fogalmakat használ. Sok ilyen függvénydefinícióval találkoztam már, és azokat a diákok általában nem is értették meg.

A halmazokkal való bevezetés is túlságosan bonyolult egy átlagos gyerek számára. Az ilyenfajta definíciónak sokkal később lenne helye. Arra kellene törekedni, hogy egy fogalom bevezetése minél egyszerűbb, életszerűbb legyen. Nézzünk meg egy – véleményem szerint – befogadható, életszerű változatot.

Először a függés fogalmát közelítjük meg. Beszélhetünk arról, hogy mi mindentől függ az, hogy: esik-e az eső vagy süt-e a nap, mi lesz az ebéd, kiárad-e egy folyó, hoz-e termést egy fa, stb.

Miután megtanultak a gyerekek egész számokat összeadni, kivonni, szorozni, játszhatunk velük olyan játékokat, ahol lépni kell a táblán előre, vagy hátra. Kicsi gyermekeinkkel játszottunk úgy, hogy két dobókockával dobtunk, és annyit kellett lépni, amennyi a két érték szorzatának és összegének különbsége. (Igen hamar rájöttek, hogy ha a kettő közül bármelyik érték 1, akkor egyet vissza kell lépni!)

Ha mindez megvan, bevezethetjük a függvény fogalmát a már megtapasztalt és természetessé váló ismeretek alapján a következő módon.

*Függvényről beszélünk, ha egy vagy több dolog függ egy vagy több dologtól.*

Így függvény a két szám szorzata, a két szám összege, a két szám különbsége, vagy akár a két szám szorzata és összege.

*Amiből, vagy amikből kiindulunk, az a változó vagy azok a változók, ami keletkezik, vagy amik keletkeznek, az a függvényérték vagy függvényértékek.*

Felírhatjuk példaként a szorzat = szorzás(x,y) = x\*y, az összeg = összeadás(x,y) = x+y és a különbség = kivonás(x,y) = x-y kifejezéseket, és a kockadobások után az x és y értékekkel gyakorolva kiszámítgathatjuk azokat. (Fenti leírásból az is következik, hogy az x és y értékek szorzatát soha nem xy-nak, hanem x\*y-nak jegyezzük le.)

Később továbbléphetünk. A (szorzat,összeg) = ((szorzás(x,y),összeadás(x,y)) = (x\*y,x+y), illetve a különbség = kivonás(szorzat,összeg) = kivonás(szorzás(x,y),összeadás(x,y)) = kivonás(x\*y,x+y) felírása után – szintén játszva – gyakorolhatunk.

Megbeszélhetjük a változók és értékek számát. Így nem csupán azt tanulhatjuk meg játszva, hogy mi is a függvény, de már korán hozzászokhatunk, hogy a függvénynek nem feltétlenül csak egyetlen változója vagy egyetlen értéke van. (Tapasztalatom szerint ez manapság sok középiskolásnak, de még egyetemistának is gondot okoz. Itt még egyáltalán nem szükséges értelmezési tartományról és értékkészletről beszélni. Halmazokról meg főleg nem.)

A játékos példából észrevehetjük, hogy függvényeket egymás után alkalmaztunk, azaz létrehoztunk összetett függvényeket. Megbeszélhetjük, hogy például a szorzás függvénynek is lehetne nem csupán két változója. Már korán kialakíthatjuk azt a szintaktikai elvet, hogy a függvénynek van neve, és a változóit a neve után zárójelbe téve, egymástól vesszővel elválasztva írjuk le. (Itt jegyzem meg, hogy teljesen hibás és káros a magyarított Excelben a változók pontosvesszővel való elválasztása. Igaz, erre nem lenne szükség, ha végre lemondanánk a tizedesvesszőről, és áttérnénk a tizedespont használatára. Tudomásul kell venni, hogy vannak dolgok, amikről érdemes, sőt le is kell mondani. Ilyen tehát például a tizedesvessző.)

Fentiek nyilvánvalóan azt is jelentik, hogy például a szinusz függvény megismerésekor azt a régies, teljesen káros és helytelen írásmódot, mint a sin x, örökre elfelejtjük, és helyette a megfelelő sin(x) írásmódot használjuk. Így remélhetőleg kisebb valószínűséggel fordulnak elő olyan esetek, hogy a sin(x)-beli x-et x-szel egyszerűsíti a diák egy törtben.

Később természetesen lehet beszélni a függvényről, mint kapcsolatról vagy hozzárendelésről, és be lehet vezetni a halmazokkal is, mert addigra már a tanuló sajátjaként, és nem valami idegen testként kezeli azt. Szintén beszélhetünk arról is, hogy sokszor meg sem tudjuk mondani, hogy valami mi mindentől függ, tehát van olyan függvény is, aminek végtelen sok változója van.

**Mi a logaritmus?**

A logaritmust még ma is úgy tanítják, mint száz évvel ezelőtt. (Elnézést kérek azoktól, akik esetleg nem.) Amikor megkérdezek egy-egy diákot, és nem a gyengébbek közül valót, hogy mi a logaritmus, akkor meglepetésemre a legtöbb esetben kiderül, hogy még definíciót sem tud kimondani rá.

Én annak idején úgy tanultam, hogy: **a** alapú logaritmus **b** az a hatványkitevő, amelyre **a**-t emelve **b**-t kapunk. Bár matematikus lettem, visszaemlékezve, a logaritmus megértése komoly erőfeszítésembe került, és azt tapasztaltam, hogy a később matematika tanárrá vált társaim nagy nehézségekkel küzdöttek egy-egy logaritmussal kapcsolatos feladat megoldásakor. Emiatt jó ideje foglalkoztatott, hogyan kellene a logaritmust jól bevezetni és jelölni. Mindig zavart az is, hogy az alap indexben van írva, és ráadásul nem előzi meg a log szócskát, így aztán cikkcakkban kell olvasni. Középről balra, majd jobbra.

Hogyan képzelem el tehát a logaritmus bevezetését?

Ha már értjük, mi a függvény és mit jelent a függvények összetétele, el kell sajátítanunk egy nagyon fontos függvénynek, az identitás, vagy azonosság függvénynek az általános, de mégis nagyon kézenfekvő definícióját.

*Az identitásfüggvények azok a függvények, amik mindenhez önmagukat rendelik.*

Az a függvény, ami tehát az asztalhoz, székhez, vagy akár egy tetszőleges személyhez saját magát rendeli, az is egy-egy identitás függvény. Egyszerű eset, ha olyan identitás függvényről beszélünk, ami egy számhoz önmagát rendeli. (Ezt szoktuk y = x-ként tanulni az iskolában.) Jelöljük ezt a függvényt id(x)-szel. Akkor tehát igaz az, hogy: id(x) = x.

Ezután bevezethetjük az inverz függvény párok (és nem a ma szokásos, tulajdonképpen kitüntetetten inverz függvény) fogalmát.

*Két függvény egymás inverz párja, ha egymás utáni alkalmazásuk a változót nem módosítja. Másként, ha összetételük, tetszőleges sorrendben, az identitás függvényt eredményezi. f és g egymás inverz párja, ha g(f(x)) = id(x) = x és f(g(x)) = id(x) = x. Ilyenkor a két függvény közül bármelyiket a másik inverzének nevezhetjük.*

Az inverz párok fogalma semmiképpen nem egyszerű, bármennyire is annak látszik, ezért fontos sokat gyakorolni. Például, láthatóan inverz párok azok a függvények, amik a változóhoz ugyanazt a számot hozzáadják illetve kivonják, vagy amik a változót felére csökkentik illetve kétszeresére növelik, stb. A gyakorlást tehát érdemes egyszerű esetekkel kezdeni. Később lehet a hatvány és gyök kapcsolatát is bevonni.

Ha a diák már tudja, mi az identitás függvény, az összetett függvény és az inverz függvénypárok fogalma, továbbá megtanulta az adott alapú hatvány fogalmát, akkor egyszerűen azt mondhatjuk, hogy az **a** alapú logaritmus nem más, mint az **a**-ra emelésnek, mint függvénynek az inverz párja. Jelölhetnénk az eddig „megszokott” jelölés mellett, annak elhagyásáig, a következő módon: a\_log(x). (Ha például az a\_exp(x) = ax, jelölést használjuk, akkor a\_log(a\_exp(x)) = id(x) = x és a\_exp(a\_log(x)) = id(x) = x.)

Valószínűleg egyszerre a logaritmus ilyenfajta bevezetése és a függvényjelölés megváltoztatása nem valósítható meg, de afelé kellene haladni. Meg kellene szüntetni a jelöléseinkben az indexeket, és egyre inkább a számítógépes nyelvek szintaktikájához kellene igazodni.

Ennek szellemében mihamarabb meg kellene tanulniuk a diákoknak az **e** szám fogalmát, és a logaritmusok **ln**-re való átírását. A különböző alapú logaritmusokkal való számolások egy matematikusképzésben elfogadhatóak, de teljesen feleslegesek egy átlagos diák számára. Az **e** alapú logaritmussal viszont nagyon fontos lenne minél előbb megismerkedniük, és azt jól használniuk.

**Deriváltról, szélsőértékről, L’Hôpital-szabályról (egyváltozós, egyértékű függvény)**

Tapasztalatom szerint az már egy viszonylag jó dolog, ha a diákok egyáltalán tudják, hogy van geometriai jelentése a deriváltnak. A baj az, hogy ebben az esetben is legfeljebb az érintő iránytangenseként ismerik azt. Ebből adódik aztán az a téveszme is, hogy a függvénynek ott van szélsőértéke, ahol a deriváltja nulla. A konkrét függvények deriválásának elsajátítása, mint megtanulandó feladat, önmagában egyáltalán nem tűnik fontosnak, csupán abból a szempontból lehet hasznos, hogy egy megadott szabályrendszer szerint kell ismereteket alkalmazni, és egy adott algoritmust végrehajtani. Ez a cél azonban bármilyen másik szabályrendszer alkalmazásával megvalósítható lenne. Fontosabbnak tűnik tehát a derivált fogalmának megértése, és alkalmazásának módszerei.

A függvény szélsőértékének meghatározásánál is a sok azonos feladat megoldása helyett jobbnak látom annak igen erős tudatosítását, hogy lehet szélsőérték derivált létezése nélkül is. Ugyancsak problémásnak látom, hogy a szélsőérték létezését sok esetben a derivált zérushelye előtt, illetve után vizsgált előjelekkel döntik el. Ha az egy konkrét értékkel előtte történik, akkor már eleve helytelen, hiszen abban a kicsi intervallumban még számtalan szélsőérték lehetséges. Az ugyanis egyáltalán nem biztos, hogy – egyszerű számolással – pontosan meg tudjuk határozni a szélsőértékek számát. Nem minden függvény olyan könnyen kezelhető. Helyesebb lenne először a megadott pontbeli második, szükség esetén a magasabb rendű deriváltakkal vizsgálódni, és csak akkor fordulni az első derivált előjelének vizsgálatához, ha a magasabb rendű deriváltak láthatóan rendre nulla értéket vesznek fel. Előfordulhat, hogy egy függvény olyan bonyolult, hogy még csak azt sem tudjuk meghatározni, hogy mely pontokban lesz a derivált nulla.

És itt jelenik meg a szimbolikus algebrai programcsomagok szerepe az oktatásban. Mert, ha már megértette a diák a derivált fogalmát és alkalmazhatóságát, akkor nem szabad azzal fárasztani, hogy azt számolgassa. Azért van a program. Neki annak segítségével kellene a gondolkodásban és az alkotásban továbblépni. Függvényeket vizsgálni és adott problémákhoz megalkotni.

Egy ma is használatban lévő egyetemi matematika jegyzetben láttam a L’Hôpital-szabály alkalmazására az alábbi példamegoldást:

 (1)

= (2)

= (3)

= (4)

= (5)

=

Felhasználva, hogy:

, emiatt  (6), illetve(7)

Természetesen a megoldás helyes. Bonyolultabb már csak úgy lehetne, ha (4) kifejezésre ismét csak alkalmaznánk a L’Hôpital-szabályt.

A megoldás pozitívumaként említhetjük meg, hogy (1) után nem a jegyzet előző oldalán a típusú határértékre levezetett általános képletet alkalmazta, és a megjegyzésben ott áll, hogy a L’Hôpital-szabály második alkalmazása pótolható lenne a konjugált szorzás módszerével is.

(Ez utóbbi kifejezés helyett talán jobb lenne a középiskolában tanultakra hivatkozni, miszerint két kifejezés azonos egész kitevőjű hatványának különbsége mindig osztható a két kifejezés különbségével, ezért ez a különbség felírható például az alábbi módon:

A gyakorolt egyszerűbb esetekben:

, , )

Meglátásom szerint, a sok – különböző határértéktípusra vonatkozó – általános képlet levezetése helyett, arra kellene rávezetni az olvasót, hogy a L’Hôpital-szabály akkor alkalmazható, ha megfelelő törtet állítottunk elő. (Ez egyébként a fenti megoldásban is így történt, csak az nem kapott megfelelő hangsúlyt.) Továbbá az ismeretek felhasználásával a lehető legtöbb megoldási lehetőséget be kellene mutatni, kiemelve, hogy az sem mindegy, hogy az egyes ismereteket a megoldási algoritmus mely szakaszában alkalmazzuk. Lássunk most ez utóbbira példát.

A (2) kifejezést, (6) beli ismereteinket azonnal felhasználva, a törtet  kifejezéssel beszorozva és a L’Hôpital-szabályt alkalmazva, az alábbi módon folytathatjuk:

=  =  =

A L’Hôpital-szabály tanításával kapcsolatban is elmondhatjuk, hogy miután a diákkal megismertettük, hogy a derivált egy határérték, és hogy mi mindenre jó, lám még újabb nehezebb határértékek meghatározására is, majd néhány példán át be is mutatjuk a gondolkodási lehetőségeket, a témát ott be is kell fejeznünk. Mert azon kívül, hogy rácsodálkozott és gondolkodott, a későbbiekben nincs rá szüksége, de ha esetleg mégis, ott lesz számára a szimbolikus algebrai programcsomag.

**Mire jó a racionális törtfüggvény integrálása?**

Ha a cikk megelőző részeit figyelemmel olvastuk, akkor már sejthetjük, hogy természetesen nem arra, hogy tudjunk ilyen típusú függvényeket integrálni. Nincs rá szükségünk! Bajnak persze nem baj, ha tudjuk. De akkor mire jó? Arra, hogy láttassunk összefüggéseket a deriváltak és integrálok között, hogy megfogalmazzunk egy algoritmust, ami esetlegesen polinom-osztásból, parciális törtekre bontásból, másodfokú nevező esetén a nevező deriváltja megfelelőszeresének számlálóbeli előállításából, illetve integrálásokból áll. Azaz lássunk kapcsolatot egy bemenet és egy várható kimenet között, használjuk addigi ismereteinket, és így, gondolkodva, fejlesszük algoritmusszemléletünket. Ha azonban néhány bemagolható típuspéldát oldatunk meg a hallgatóval, és nem fentiek tudatosítására törekszünk, semmit sem értünk el.

**Záró gondolatok, javaslatok**

Már az általános és középiskolában is témákat tanulnak a gyerekek, és azok összekapcsolása nem kellő mértékben történik meg. Inkább azt a módszert kellene követni, hogy problémamegoldások mentén tanulnák meg a hozzájuk szükséges elméletet. Kevesebb példamegoldás, de többféle módon, a hozzá szükséges elmélet újra és újra átgondolásával (Mit tudok?), és esetlegesen újra és újra levezetésével.

Ne matematikusok módjára próbáljuk első alkalommal a fogalmakat bevezetni, hanem az életben megtapasztalt ismeretekre támaszkodva, játékosan, és minél általánosabban.

Lehetőleg – már a kezdetektől – a számítástechnikában alkalmazott jelöléseket használjuk. (Például a már említett \*, zárójelek, vessző a pontosvessző helyett, tizedespont, stb.)

Ne a megismert matematikai elveket gyakoroltassuk, hanem olyan problémákat, amelyeket azokkal meg tudunk oldani, és mutassuk rá a megoldások sokszínűségére.

Alkalmazzunk minél hamarabb, akár már az általános iskolában, szimbolikus algebrai programcsomagot, egy-egy oktatási szinten lehetőleg egyfélét.

Végül, de mindenekelőtt, hozzunk létre olyan oktatócsoportokat (nevezzük őket műhelyeknek), akik a fentieknek megfelelően készítenek tankönyveket, és „igazi” példatárakat, amik nem csupán példák halmazából állnak, hanem példamegoldások sokaságát sokféleképpen tartalmazzák, és egy-egy példamegoldás a hozzátartozó elméletet mindig (esetlegesen belső hivatkozással) bemutatja. Így vezetve az olvasót a gondolkodás rejtelmeibe. A műhelyek irányításával az általuk elkészített alapanyagokat széles konzultációra bocsátva alkossunk valóban jó tankönyveket, amik egy-egy célcsoportnak szólnak. Fontosnak tartom még, hogy ezt a munkát súlyának megfelelően igen magas díjazással értékeljük, és ne úgy, ahogyan ez manapság történik.

Nem mehetek el szó nélkül amellett, hogy cikkem szorosan összefügg a diákok és tanárok motiváltságáról és megbecsüléséről is szóló megelőző két másikkal ([3] és [4]), amiket feltétlenül elolvasásra ajánlok.

**Irodalomjegyzék**

* [1] Hatvany László: KARÁCSONY SÁNDOR PEDAGÓGIAI ÍRÁSAIBÓL (9 tanulmány, 1922-1946), Csökmei Kör, 1994
* [2] Karácsony Sándor: LECKÉK A LECKÉKRŐL „A TANULÁS MESTERFOGÁSAI”-NAK FOLYTATÁSA, Budapest, 1931, ISSN: 0236-7688, ISBN: 963 7516 73 5
* [3] Kiss László: A magyar felsőoktatásról, 2010 (Gondolatok, elképzelések), <http://uni-obuda.hu/e-bulletin/Kiss_1.pdf>, 2010
* [4] Kiss László: Gondolatok és elképzelések, nem csak a felsőoktatásról, 2013, Matematikát, fizikát és informatikát oktatók XXXVII. országos konferenciája (MAFIOK) Miskolc, 2013. augusztus 26-28. ISBN: 978-963-358-037-0, <http://www.uni-miskolc.hu/~matsefi/mafiok/cikkek/MAFIOK_2013_Kiss.pdf>